ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «НАВИГАТОР»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2024-2025 УЧ. ГОД

Краткие решения к заданиям заключительного этапа

9-11 класс

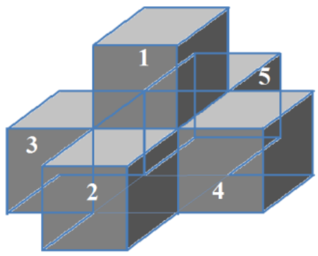
Вариант 1

1. Шар массой 3$\boldsymbol{m}$ со скоростью ν = 12 м/с испытывает лобовое абсолютно упругое столкновение с шаром массы 2$\boldsymbol{m}$, который до удара покоился. Этот шар, в свою очередь, также испытывает абсолютно упругое лобовое столкновение с шаром массы $\boldsymbol{m}$, который до удара покоился. Найти скорость последнего шара после столкновения. Ответ выразить в м/с и округлить до целого числа.

Ответ: 19

<u>Решение</u>: используем при столкновении шаров стандартную схему. Пусть сталкиваются два шара массой M_1 и M_2 со скоростями v_1 и v_2 и при этом первый шар передаёт второму импульс p. Скорости и импульс - величины векторные, мы будем об этом помнить. Закон сохранения энергии имеет вид: $(M_1v_1 - v)^2 / M_1 + (M_2v_2 + p)^2 / M_2 = M_1v_1^2 + M_2v_2^2$. При лобовом абсолютно упругом соударении выполняется и закон сохранения энергии и закон сохранения импульса. Нетривиальное решение (ненулевое) здесь одно: $p = [2M_1M_2 / (M_1+M_2)](v_1 - v_2)$. Если второй шар перед ударом был неподвижен, то $v_2' = 2M_1v_1 / (M_1+M_2)$. Подставляя исходные данные получим, что последний шар будет двигаться со скоростью ν = 19 м/с.

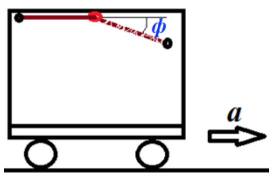
2. В доме 6 комнат кубической формы, причём 5 комнат – на первом этаже, а одна (№1) – на втором. Все комнаты одинаковые и отделяются от других комнат или от окружающего пространства одинаковыми стенками. У каждой комнаты 6 стенок (горизонтальные стенки не отличаются от вертикальных). Отопление проведено только в комнату №3 и в ней поддерживается температура +40ºC. Найти температуру в комнате №6 (центральная комната на первом этаже, на рисунке не видна). Температура окружающей среды и грунта можно считать неизменной и равной 0ºC. Ответ выразить в градусах Цельсия и округлить до десятых.



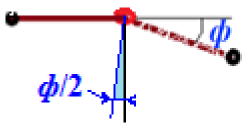
Ответ: 7,5

<u>Решение</u>: при условии стационарности потоков тепловой поток внутрь каждой комнаты равен потоку наружу. Потоки тепла через стенку при стационарности температур по разные от неё стороны определяется по формуле $q = \kappa (S/d) \Delta T$, где κ – коэффициент теплопроводности стенки, а S и d – площадь и толщина стенки соответственно. Поскольку все стенки одинаковы, а наружная температура T_o (и в воздухе, и в грунте) фиксирована, то из симметричности задачи можно считать, что температура в комнатах № 1, 2, 4 и 5 одинакова (обозначим её T_1). Баланс тепловых потоков запишем как $4(T_6-T_1) + (T_6-T_0) = (T_3-T_6)$ и $(T_6-T_1) = 5(T_1-T_0)$. Подставляя исходные данные получим, что температура в градусах Цельсия будет равна 7,5.

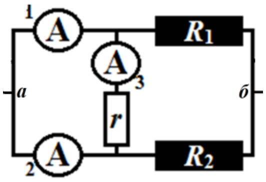
3. Фургончик движется горизонтально с ускорением $\boldsymbol{a}$. Груз на верёвочке подвешен к потолку и затем поднимается до потолка (верёвочка всё время натянутая). Груз отпускается, затем двигается без трения и поднимается к потолку (в самой высшей точке угол между верёвочкой и потолком равен $\boldsymbol{\phi}$).



Найти угол **ϕ**, если **$a = g/5$**. Ответ выразить в градусах, округлить до целых.
Ответ: 23



Решение: биссектриса угла, стороны которого представляют крайние положения верёвочки и груза по направлению совпадает с равнодействующей силы инерции и силы тяжести в системе отсчёта, связанной с фургончиком. Отклонение этого угла от вертикали как раз равно $\phi/2$. Следовательно, ϕ = 2 arctg 1/5 = 23 градуса.

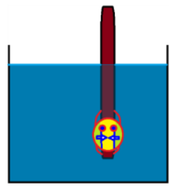


4. В цепь соединены два сопротивления и три одинаковых неидеальных амперметра. Неидеальность амперметра заключается в наличии у него ненулевого сопротивления, при этом ток через себя каждый амперметр показывает правильно. Показания амперметров такие: $\boldsymbol{I_1}$ = 4 А, $\boldsymbol{I_2}$ = 7 А, $\boldsymbol{I_3}$ = 1 А. Напряжение между точками *а* и *б* равно $\boldsymbol{U}$ = 120 В. Сопротивление $\boldsymbol{r}$, через которое подключен 3-й амперметр, равно 2 Ом. Найти сопротивление амперметров. Ответ выразить в Омах и округлить до целого числа.
Ответ: 1

Решение: трудность задачи состоит в том, что сразу непонятно, в какую сторону течёт ток через амперметр №3 (A_3). Пусть потенциал в точке *а* равен U = 135, а в точке *б* – 0. Поскольку ток через A_2 больше чем через A_1, то потенциал снизу от A_3 меньше и, следовательно, ток через A_3 течёт сверху вниз. Обозначим сопротивление амперметров R, токи через сопротивления R_1 и R_2, соответственно, $i_1 = I_1 - I_3$ и $i_2 = I_2 + I_3$. Получим систему уравнений: $I_1R+i_1R_1 = U$, $I_2R+i_2R_2 = U$, $I_2R = I_1R + I_3(R+r)$. Решая её, получим:

$$R = \frac{I_3 r}{I_2 - I_3 - I_1} \qquad R_1 = \frac{(I_2 - I_3 - I_1)U - I_1 I_3 r}{(I_1 - I_3)\,(I_2 - I_3 - I_1)} \qquad R_2 = \frac{(I_2 - I_3 - I_1)U - I_2 I_3 r}{(I_2 + I_3)\,(I_2 - I_3 - I_1)},$$

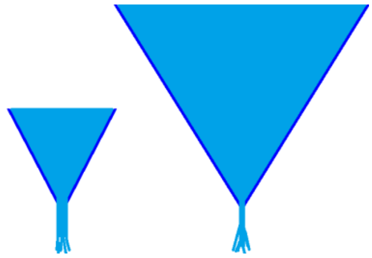
откуда, после подстановки численных значений получим, что численное значение сопротивления равно 1 Ом.



5. Морской клоп массы m = 20 г пренебрежимо малого размера передвигается вверх по палочке, плавающей вертикально в воде ($\rho_в$ = 1 г/см^3). Масса палочки M = 100 г, длина L = 2 м, плотность ρ = 0,7 г/см^3. На каком расстоянии от нижнего конца палочки должен находиться клоп, чтобы палочка потеряла устойчивость вертикального положения? Ответ выразить в см и округлить до целого числа.
Ответ: 4

Решение: на палочку с клопом действуют всего 2 силы – сила тяжести и сила Архимеда. Обе силы равны по величине и противоположны по направлению, и их величина от положения клопа не зависит, пока клоп не достигнет поверхности воды. Сила Архимеда приложена к середине погруженной части палочки, а точка приложения силы тяжести есть центр масс системы палочка+клоп и перемещается вверх. Когда эта точка дойдёт до середины погруженной части, равновесие перестанет быть устойчивым. Введём обозначения: h – глубина нижнего конца палочки, x – координата клопа относительно нижнего конца палочки, S – площадь сечения палочки. Тогда сила Архимеда равна $\rho_в Shg$. Сила тяжести равна $(M+m)g = (\rho SL+m)g$. Отсюда, кстати, $S = M/\rho L$. Итак, координата приложения силы Архимеда $h/2$. Координата центра масс $(mx + ML/2)/(m+M)$. Приравнивая отдельно силы и координаты их приложения, получим: $\rho_в Sh = M+m$ и $h/2 = (mx + ML/2)/(m+M)$. Решая эту систему, получим: $h = (1+m/M)(\rho/\rho_в)L$, $x = ½[(M+m)^2/Mm\ (\rho/\rho_в) - M/m]L$. Подставляя числа получим x = 4 см.

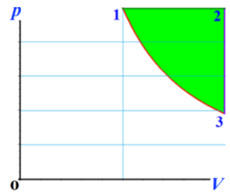
6. Известно, что из конического сосуда с отверстием внизу вода выливается за 20 мин. За какое время она выльется из сосуда в 2 раза меньшим диаметром нижнего отверстия, в четыре раза большей высоты и в 3 раза большего диаметра верхней поверхности жидкости? Ответ выразить в часах, округлить до целых. Трением жидкости о стенки сосуда пренебречь. Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2.



Ответ: 24

Решение: процессы истечения из разных сосудов обладают очевидным подобием. Диаметры верхней поверхности жидкости и нижнего отверстия обозначим, соответственно, D и d. Время истечения жидкости зависит от 1) объёма жидкости V, 2) площади сечения нижнего отверстия S и 3) скорости истечения v. Последняя, согласно уравнению Бернулли, пропорциональна корню квадратному из высоты уровня жидкости h. Итак, время $t \sim V/Sv \sim hD^2/d^2/h^{½} \sim h^{½}(D/d)^2$. Чтобы получить время истечения из большого сосуда в часах, нужно время полученное в минутах разделить на 60. Получится 24 часа.

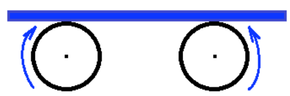
7. Определить кпд цикла, состоящего из изохоры, изобары и адиабаты. Газ двухатомный. Закон адиабаты $\boldsymbol{p}^5\boldsymbol{V}^7$ = const. $\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_2 = 10^5$ Па, $\boldsymbol{V}_1$ = 30 л, $\boldsymbol{V}_2 = \boldsymbol{V}_3$ = 60 л. Ответ дать в процентах, округлить до целого числа.



Ответ: 11

Решение: тепло передаётся рабочему телу на этапе 1 –> 2. 1-е началотермодинамики даёт: $Q = A+\Delta U$. Работа $p\Delta V$, изменение внутренней энергии $\Delta U = {}^3/_2\, \Delta(pV)$ => Находим Q. Теперь для вычисления кпд остаётся посчитать работу на участке 1-3. Это делается легко, потому что при адиабатическом процессе тепло не передаётся. Вычислив полезную работу цикла, делим на Q и получаем 11 процентов.

8. Два цилиндра с одинаковыми размерами с параллельными осями вращаются навстречу друг другу с достаточно большими угловыми скоростями. На цилиндры сверху положена однород-ная недеформируемая планка достаточно большой длины и массы m = 0,5 кг. Коэффициенты трения между планкой и левым цилиндром равен μ_1 = 0,5; между планкой и правым цилиндром μ_2 = 0,4. Расстояние между цилиндрами равно ℓ = 1 м. Найти период малых горизонтальных колебаний планки. Принять g = 10 м/с^2. Ответ дать в секундах, округлить до целых.



Ответ: 3

Решение: если центр масс планки смещается на x вправо, то левая сила давления становится $N_1 = mg(½ - x/\ell)$, а правая $N_2 = mg(½ + x/\ell)$. Горизонтальная сила равна $mg[\mu_1(½ - x/\ell)–\mu_2(½ + x/\ell)] = ½mg(\mu_1–\mu_2)–½mg(\mu_1+\mu_2)x/\ell$.

По аналогии с уравнением маятника, получим $T = 2\pi\, (2\ell\, /\, g(\mu_1+\mu_2))^{½}$. Подставив исходные данные получим 3 секунды.

МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «НАВИГАТОР» ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА» 2024-2025 УЧ. ГОД

Краткие решения к заданиям заключительного этапа

9-11 класс

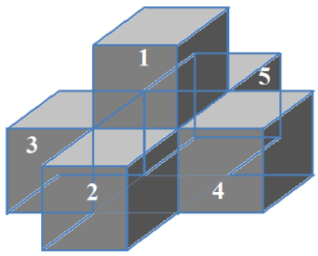
Вариант 2

1. Шар массой $5m$ со скоростью $v = 14$ м/с испытывает лобовое абсолютно упругое столкновение с шаром массы $3m$, который до удара покоился. Этот шар, в свою очередь, также испытывает абсолютно упругое лобовое столкновение с шаром массы m, который до удара покоился. Найти скорость последнего шара после столкновения. Ответ выразить в м/с и округлить до целого числа.

Ответ: 34

Решение: используем при столкновении шаров стандартную схему. Пусть сталкиваются два шара массой M_1 и M_2 со скоростями v_1 и v_2 и при этом первый шар передаёт второму импульс p. Скорости и импульс - величины векторные, мы будем об этом помнить. Закон сохранения энергии имеет вид: $(M_1v_1 - v)^2 / M_1 + (M_2v_2 + p)^2 / M_2 = M_1v_1^2 + M_2v_2^2$. При лобовом абсолютно упругом соударении выполняется и закон сохранения энергии и закон сохранения импульса. Нетривиальное решение (ненулевое) здесь одно: $p = [2M_1M_2 / (M_1+M_2)] (v_1 - v_2)$. Если второй шар перед ударом был неподвижен, то $v_2' = 2M_1v_1 / (M_1+M_2)$. Подставляя исходные данные получим, что последний шар будет двигаться со скоростью $v = 34$ м/с.

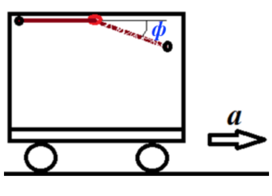
2. В доме 6 комнат кубической формы, причём 5 комнат – на первом этаже, а одна (№1) – на втором. Все комнаты одинаковые и отделяются от других комнат или от окружающего пространства одинаковыми стенками. У каждой комнаты 6 стенок (горизонтальные стенки не отличаются от вертикальных). Отопление проведено только в комнату №3 и в ней поддерживается температура +40°С. Найти температуру в комнате №6 (центральная комната на первом этаже, на рисунке не видна). Температура окружающей среды и грунта можно считать неизменной и равной 5°С. Ответ выразить в градусах Цельсия и округлить до десятых.



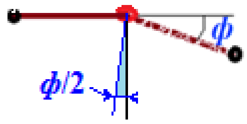
Ответ: 11,6

Решение: при условии стационарности потоков тепловой поток внутрь каждой комнаты равен потоку наружу. Потоки тепла через стенку при стационарности температур по разные от неё стороны определяется по формуле $q = \kappa\ (S/d)\ \Delta T$, где κ – коэффициент теплопроводности стенки, а S и d – площадь и толщина стенки соответственно. Поскольку все стенки одинаковы, а наружная температура T_o (и в воздухе, и в грунте) фиксирована, то из симметричности задачи можно считать, что температура в комнатах № 1, 2, 4 и 5 одинакова (обозначим её T_1). Баланс тепловых потоков запишем как $4(T_6-T_1) + (T_6-T_0) = (T_3-T_6)$ и $(T_6-T_1) = 5(T_1-T_0)$. Подставляя исходные данные получим, что температура в градусах Цельсия будет равна 11,6.

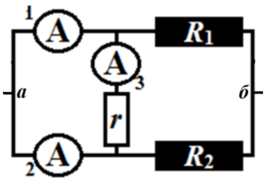
3. Фургончик движется горизонтально с ускорением a. Груз на верёвочке подвешен к потолку и затем поднимается до потолка (верёвочка всё время натянутая). Груз отпускается, затем двигается без трения и поднимается к потолку (в самой высшей точке угол между верёвочкой и потолком равен ϕ). Найти угол ϕ, если $a = g/4$. Ответ выразить в градусах, округлить до целых.



Ответ: 28



Решение: биссектриса угла, стороны которого представляют крайние положения верёвочки и груза по направлению совпадает с равнодействующей силы инерции и силы тяжести в системе отсчёта, связанной с фургончиком. Отклонение этого угла от вертикали как раз равно $\phi/2$. Следовательно, $\phi = 2$ arctg $1/4 = 28$ градусов.



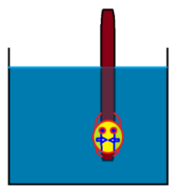
4. В цепь соединены два сопротивления и три одинаковых неидеальных амперметра. Неидеальность амперметра заключается в наличии у него ненулевого сопротивления, при этом ток через себя каждый амперметр показывает правильно. Показания амперметров такие: $I_1 = 5$ А, $I_2 = 9$ А, $I_3 = 1$ А. Напряжение между точками *а* и *б* равно $U = 135$ В. Сопротивление r, через которое подключен 3-й амперметр, равно 3 Ом. Найти сопротивление амперметров. Ответ выразить Омах и округлить до целого числа.

Ответ: 1

Решение: трудность задачи состоит в том, что сразу непонятно, в какую сторону течёт ток через амперметр №3 (A_3). Пусть потенциал в точке *а* равен $U = 135$, а в точке *б* – 0. Поскольку ток через A_2 больше чем через A_1, то потенциал снизу от A_3 меньше и, следовательно, ток через A_3 течёт сверху вниз. Обозначим сопротивление амперметров R, токи через сопротивления R_1 и R_2, соответственно, $i_1 = I_1 - I_3$ и $i_2 = I_2 + I_3$. Получим систему уравнений: $I_1R + i_1R_1 = U$, $I_2R + i_2R_2 = U$, $I_2R = I_1R + I_3(R+r)$. Решая её, получим:

$$R = \frac{I_3 r}{I_2 - I_3 - I_1} \qquad R_1 = \frac{(I_2 - I_3 - I_1)U - I_1 I_3 r}{(I_1 - I_3)(I_2 - I_3 - I_1)} \qquad R_2 = \frac{(I_2 - I_3 - I_1)U - I_2 I_3 r}{(I_2 + I_3)(I_2 - I_3 - I_1)},$$

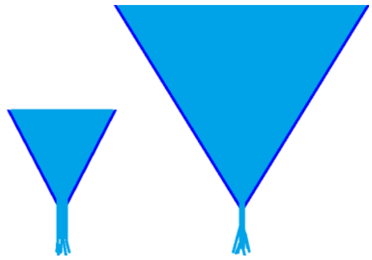
откуда, после подстановки численных значений получим, что численное значение сопротивления равно 1 Ом.



5. Морской клоп массы $m = 30$ г пренебрежимо малого размера передвигается вверх по палочке, плавающей вертикально в воде ($\rho_в = 1$ г/см^3). Масса палочки $M = 200$ г, длина $L = 1{,}5$ м, плотность $\rho = 0{,}8$ г/см^3. На каком расстоянии от нижнего конца палочки должен находиться клоп, чтобы палочка потеряла устойчивость вертикального положения? Ответ выразить в см и округлить до целого числа.

Ответ: 29

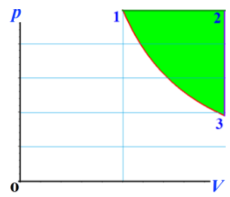
Решение: на палочку с клопом действуют всего 2 силы – сила тяжести и сила Архимеда. Обе силы равны по величине и противоположны по направлению, и их величина от положения клопа не зависит, пока клоп не достигнет поверхности воды. Сила Архимеда приложена к середине погруженной части палочки, а точка приложения силы тяжести есть центр масс системы палочка+клоп и перемещается вверх. Когда эта точка дойдёт до середины погруженной части, равновесие перестанет быть устойчивым. Введём обозначения: h – глубина нижнего конца палочки, x – координата клопа относительно нижнего конца палочки, S – площадь сечения палочки. Тогда сила Архимеда равна $\rho_в Shg$. Сила тяжести равна $(M+m)g = (\rho SL+m)g$. Отсюда, кстати, $S = M/\rho L$. Итак, координата приложения силы Архимеда $h/2$. Координата центра масс $(mx + ML/2)/(m+M)$. Приравнивая отдельно силы и координаты их приложения, получим: $\rho_в Sh = M+m$ и $h/2 = (mx + ML/2)/(m+M)$. Решая эту систему, получим: $h = (1+m/M)(\rho/\rho_в)L$, $x = ½[(M+m)^2/Mm\ (\rho/\rho_в) – M/m]L$. Подставляя числа получим $x = 29$ см.



6. Известно, что из конического сосуда с отверстием внизу вода выливается за 25 мин. За какое время она выльется из сосуда в 2 раза меньшим диаметром нижнего отверстия, в 3 раза большей высоты и в 2 раза большего диаметра верхней поверхности жидкости? Ответ выразить в часах, округлить до целых. Трением жидкости о стенки сосуда пренебречь. Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2.

Ответ: 12

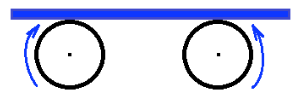
<u>Решение</u>: процессы истечения из разных сосудов обладают очевидным подобием. Диаметры верхней поверхности жидкости и нижнего отверстия обозначим, соответственно, D и d. Время истечения жидкости зависит от 1) объёма жидкости V, 2) площади сечения нижнего отверстия S и 3) скорости истечения v. Последняя, согласно уравнению Бернулли, пропорциональна корню квадратному из высоты уровня жидкости h. Итак, время $t \sim V/Sv \sim hD^2/d^2/h^{½} \sim h^{½}(D/d)^2$. Чтобы получить время истечения из большого сосуда в часах, нужно время, полученное в минутах, разделить на 60. Получится 12 часов.



7. Определить кпд цикла, состоящего из изохоры, изобары и адиабаты. Газ одноатомный. Закон адиабаты p^3V^5 = const. $p_1 = p_2 = 10^5$ Па, $V_1 = 30$ л, $V_2 = V_3 = 60$ л. Ответ дать в процентах, округлить до целого числа.

Ответ: 18

<u>Решение</u>: тепло передаётся рабочему телу на этапе 1 –> 2. 1-е началотермодинамики даёт: $Q = A+\Delta U$. Работа $p\Delta V$, изменение внутренней энергии $\Delta U = {}^3/_2\ \Delta(pV)$ => Находим Q. Теперь для вычисления кпд остаётся посчитать работу на участке 1-3. Это делается легко, потому что при адиабатическом процессе тепло не передаётся. Вычислив полезную работу цикла, делим на Q и получаем 18 процентов.



8. Два цилиндра с одинаковыми размерами с параллельными осями вращаются навстречу друг другу с достаточно большими угловыми скоростями. На цилиндры сверху положена однород-ная недеформируемая планка достаточно большой длины и массы $m = 0{,}7$ кг. Коэффициенты трения между планкой и левым цилиндром равен $\mu_1 = 0{,}2$; между планкой и правым цилиндром $\mu_2 = 0{,}3$. Расстояние между цилиндрами равно $\ell = 1$ м. Найти период малых горизонтальных колебаний планки. Принять $g = 10$ м/с^2. Ответ дать в секундах, округлить до целых.

Ответ: 4

<u>Решение</u>: если центр масс планки смещается на x вправо, то левая сила давления становится $N_1 = mg(½ - x/\ell)$, а правая $N_2 = mg(½ + x/\ell)$. Горизонтальная сила равна $mg[\mu_1(½ - x/\ell) – \mu_2(½ + x/\ell)] = ½mg(\mu_1–\mu_2)–½mg(\mu_1+\mu_2)x/\ell$.

По аналогии с уравнением маятника, получим $T = 2\pi\ (2\ell\ /\ g(\mu_1+\mu_2))^{½}$. Подставив исходные данные получим 4 секунды.